THE DIFFERENTIALGEOMETRY SOFTWARE PROJECT

How To Create A Clifford Algebra

Synopsis

- Let V be a vector space of dimension n and let Q be a non-degenerate quadratic form on V. The Clifford algebra $CL(V, Q)$ is the associative algebra generated by the identity element e_0 and products $x \cdot y \cdot z \cdots$ of elements $x, y, z \in V$, subject to the relations

$$x \cdot y + y \cdot x = -2\, Q(x, y)\, e_0.$$

Note that this implies that $x \cdot x = -Q(x, x) \cdot e_0$. If $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ is a basis for V, then e_0 and the products

$$e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k} \text{ for } 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \text{ and } 1 \le k \le n$$

define a basis for $Cl(V, Q)$. In particular, the vector space dimension of the Clifford algebra is $\dim(Cl(V, Q)) = 2^n$.

- In this worksheet we show how to create a Clifford algebra in Maple using the AlgebraLibraryData procedure.

Examples

Load in the required packages. The interface command allows for the printing of larger dimensional multiplication tables.

```
> with(DifferentialGeometry): with(LieAlgebras):
> interface(rtablesize = 15):
```

Example 1.

The command AlgebraLibraryData returns a list of the multiplication rules for the basis elements of the specified algebra. The multiplication table for a Clifford algebra becomes more transparent if we label the basis elements as $e_{i_1 i_2 \cdots i_k} = e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k}$. The following is the multiplication table for the Clifford algebra defined by $\mathbb{R}^3$ equipped with the standard quadratic form (defined by the identity matrix).

```
> AD1 := AlgebraLibraryData("Clifford(3)", CL3);
```

$$AD1 := [e1^2 = e1, e1 \cdot e2 = e2, e1 \cdot e3 = e3, e1 \cdot e4 = e4, e1 \cdot e5 = e5, e1 \cdot e6 = e6, e1 \cdot e7 \quad \mathbf{(1)}$$

$= e7, e1 \cdot e8 = e8, e2 \cdot e1 = e2, e2^2 = -e1, e2 \cdot e3 = e5, e2 \cdot e4 = e6, e2 \cdot e5 = -e3, e2 \cdot e6$
$= -e4, e2 \cdot e7 = e8, e2 \cdot e8 = -e7, e3 \cdot e1 = e3, e3 \cdot e2 = -e5, e3^2 = -e1, e3 \cdot e4 = e7, e3$
$\cdot e5 = e2, e3 \cdot e6 = -e8, e3 \cdot e7 = -e4, e3 \cdot e8 = e6, e4 \cdot e1 = e4, e4 \cdot e2 = -e6, e4 \cdot e3 =$
$-e7, e4^2 = -e1, e4 \cdot e5 = e8, e4 \cdot e6 = e2, e4 \cdot e7 = e3, e4 \cdot e8 = -e5, e5 \cdot e1 = e5, e5 \cdot e2$
$= e3, e5 \cdot e3 = -e2, e5 \cdot e4 = e8, e5^2 = -e1, e5 \cdot e6 = e7, e5 \cdot e7 = -e6, e5 \cdot e8 = -e4, e6$
$\cdot e1 = e6, e6 \cdot e2 = e4, e6 \cdot e3 = -e8, e6 \cdot e4 = -e2, e6 \cdot e5 = -e7, e6^2 = -e1, e6 \cdot e7 = e5,$
$e6 \cdot e8 = e3, e7 \cdot e1 = e7, e7 \cdot e2 = e8, e7 \cdot e3 = e4, e7 \cdot e4 = -e3, e7 \cdot e5 = e6, e7 \cdot e6 =$
$-e5, e7^2 = -e1, e7 \cdot e8 = -e2, e8 \cdot e1 = e8, e8 \cdot e2 = -e7, e8 \cdot e3 = e6, e8 \cdot e4 = -e5, e8 \cdot e5$
$= -e4, e8 \cdot e6 = e3, e8 \cdot e7 = -e2, e8^2 = e1]$

Now we load these multiplication rules into memory with DGsetup. At this point we can also specify the labels we wish to use for the vector basis for our Clifford algebra.

```
> DGsetup(AD1, '[e0, e1, e2, e3, e12, e13, e23, e123]', [omega]);
```

algebra name: CL3 **(2)**

Display the multiplication table for the Clifford algebra $CL(R^3, I_3)$

```
CL3 > MultiplicationTable();
```

	e0	e1	e2	e3	e12	e13	e23	e123
e0	e0	e1	e2	e3	e12	e13	e23	e123
e1	e1	-e0	e12	e13	-e2	-e3	e123	-e23
e2	e2	-e12	-e0	e23	e1	-e123	-e3	e13
e3	e3	-e13	-e23	-e0	e123	e1	e2	-e12
e12	e12	e2	-e1	e123	-e0	e23	-e13	-e3
e13	e13	e3	-e123	-e1	-e23	-e0	e12	e2
e23	e23	e123	e3	-e2	e13	-e12	-e0	-e1
e123	e123	-e23	e13	-e12	-e3	e2	-e1	e0

(3)

Thus, for example, we see that
$e2 \cdot e123 = e2 \cdot (e1 \cdot e2 \cdot e3) = (e2 \cdot e1) \cdot e2 \cdot e3 = -(e1 \cdot e2) \cdot e2 \cdot e3 = -e1 \cdot (e2 \cdot e2) \cdot e3 = e1 \cdot e3 = e13$, which can be checked explicitly, e.g.,

```
CL3 > evalDG(e2.e123);
```

e13 **(4)**

Example 2.

Here is the split version of the Clifford algebra, defined with respect to the following quadratic form.

```
> Q := < < 0, 0, 1> | <0, 1, 0> | <1, 0, 0> >;
```

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

We use the keyword argument *quadraticform* in the calling sequence to AlgebraLibraryData.

```
> AD4 := AlgebraLibraryData("Clifford(3)", CL3Q, quadraticform = Q):
> DGsetup(AD4);
```

$$\textit{algebra name: CL3Q} \qquad (6)$$

Display the multiplication table for the Clifford algebra.

```
CL3Q > MultiplicationTable();
```

(7)

|	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
e1 |	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
e2 |	e2	0 e1	e5	e6	0 e1	0 e1	e8	0 e1
e3 |	e3	-e5	-e1	e7	e2	-e8	-e4	e6
e4 |	e4	-2 e1 − e6	-e7	0 e1	-2 e3 + e8	-2 e4	0 e1	-2 e7
e5 |	e5	0 e1	-e2	e8	0 e1	0 e1	-e6	0 e1
e6 |	e6	-2 e2	-e8	0 e1	-2 e5	-2 e6	0 e1	-2 e8
e7 |	e7	-2 e3 + e8	e4	0 e1	2 e1 + e6	-2 e7	0 e1	2 e4
e8 |	e8	-2 e5	e6	0 e1	2 e2	-2 e8	0 e1	2 e6

Note that $e2^2 = e4^2 = 0$ and that $e1$, $e3$ no longer anti-commute, which can be checked explicitly, e.g.,

```
CL3Q > evalDG(e2.e2);
```

$$0\ e1 \qquad (8)$$

Commands Illustrated

- AlgebraLibraryData, DGsetup, evalDG, MultiplicationTable

Related Commands

- AlgebraData, SimpleLieAlgebraData

References

- J. Baez, *The Octonions*

• W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory - A First Course*
• F. Reese Harvey, *Spinors and Calibrations*
• http://en.wikipedia.org/wiki/Clifford_algebra

Release Notes

• The illustrated commands are available in Maple 17 and subsequent releases.

Authors

Ian M. Anderson and Thomas J Apedaile,
Department of Mathematics and Statistics , Utah State University
August 13, 2012